Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Développements :

Intégrale de Dirichlet, Formule des compléments.

Bibliographie :

Nourdin, Gourdon, Briane-Pagès, OA, Queffelec Analyse complexe, Demailly, Ouvrard, Candelpergher.

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon doit être très riche en exemples simples, comme l'intégrale $\int \sin(t)/t dt$. Il est souhaitable de présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de R^n ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de Fourier d'une gaussienne a sa place dans cette leçon. On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Rapport du jury 2018 :

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int \sin(t)/t dt$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de Fourier d'une gaussienne a sa place dans cette leçon. On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales. Enfin, il est aussi possible d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.).

1 Méthodes directes

1.1 Calcul de primitives

Théorème 1 (Nourdin p62)**.** *[Candel p15] Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive F, et on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*

Remarque 2. *Cette expression explicite d'une intégrale en fonction d'une primitive est la clé de nombreuses résolutions d'équations différentielles, ainsi les linéaires.*

Exemple 3 (Gourdon p133)**.** *Quelques primitives usuelles.*

Exemple 4. *Calcul de l'aire d'un disque, $\int_0^1 x^n dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}$.*

Proposition 5 (Gourdon p133)**.** *On décompose F en éléments simples pour se ramener au calcul de deux primitives particulières.*

Exemple 6 (Gourdon p138)**.** $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$.

1.2 Intégrations par parties

Proposition 7 (Nourdin p62)**.** *[Gourdon p122] Formule d'intégration par parties.*

Remarque 8. *Généralisation à des intervalles non bornés.*

Exemple 9. $\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$.

Exemple 10 (Gourdon p126)**.** *Intégrales de Wallis. (à détailler)*

Exemple 11 (Gourdon p159)**.** $\Gamma(n+1) = n!$.

Exemple 12. *Primitive de* $\ln(x)$.

Proposition 13 (Gourdon p135)**.** *Polynômes en* $\sin$ *et* $\cos$.

1.3 Changement de variables

Exemple 14 (Gourdon p135)**.** *Règles de Bioche.*

Proposition 15. *Calcul d'intégrale d'une série trigonométrique en* $\cos(\theta)$ *avec* $t = tan(\theta/2)$

Exemple 16 (Gourdon p135).

Théorème 17 (Gourdon p334). *[OA] Formule du changement de variables dans* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 18 (Gourdon p335). *Passage en polaires.*

Exemple 19 (FGN an3 p192). $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx = -\pi/2\ln(2)$.

1.4 Théorèmes de Fubini

Théorème 20 (Briane p217). *Soit* $f : \mathbb{R}^n \times R^m \to \mathbb{R}_+$ *mesurable. Alors les intégrales suivantes existent et vérifient :* $\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m}(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx)dy$. *Si* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ *est intégrable, on a les mêmes égalités.*

Exemple 21 (Gourdon p335). *Intégrale de Gauss.*

Exemple 22 (Briane p245). *Volume de la boule unité.*

Exemple 23 (Gourdon p342). *Intégrale de Fresnel* $\int \cos(x^2)dx$.

Exemple 24. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{8}$.

2 Utilisation de convergences et intégrales à paramètres

2.1 Sommes de Riemann

Proposition 25 (Gourdon p125). *Limite des sommes de Riemann.*

Exemple 26 (Gourdon p125). $1/(1+t)$.

Exemple 27 (Gourdon p181). *calcul de* $I(\rho) = \int_0^\pi \log(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)d\theta$.

2.2 Suites et séries de fonctions

Proposition 28 (Briane p134). *Théorème de convergence dominée.*

Exemple 29 (Gourdon p342). *Intégrale de Fresnel.*

Proposition 30 (Briane p137). *Théorème d'interversion séries-intégrales.*

Exemple 31 (Briane p147). $\int \frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}dx$.

Exemple 32 (Gourdon ?). $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(x)-1}dx$.

Exemple 33 (Gourdon p224). *[Briane p129] lim* $\int_0^n (1-t/n)^n dt = 1$, *d'où* $\int_0^{+\infty} e^{-t}ln(t)dt = -\gamma$ *(où* γ *est la constante d'Euler).*

Exemple 34 (Nourdin p70). $\int \sin(t)/tdt$ *par d).*

2.3 Intégrales à paramètres

Proposition 35 (Briane p26). *Continuité d'une intégrale à paramètre.*

Application 36. *Continuité de la transformée de Fourier.*

Proposition 37. *Dérivabilité d'une intégrale à paramètres.*

Exemple 38 (Briane p26). $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\exp(-tx)dx$.

Exemple 39 (Gourdon p164). *Transformée de Fourier de la Gaussienne :* $\int e^{-t}e^{ixt}dt$.

Exemple 40. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}cos(xt)dt = \sqrt{\pi}/2e^{-t^2/4}$.

Exemple 41. *Intégrale de Gauss.*

2.4 Transformée de Fourier

Définition 42. *Transformée de Fourier.*

Proposition 43. *Inversion de Fourier.*

Proposition 44. *Fourier Plancherel.*

Application 45 (Bernis). *Intégrale de sinc.*

3 Utilisation de l'analyse complexe

3.1 Théorème de prolongement analytique

Proposition 46 (OA p54). *Théorème de prolongement analytique.*

Exemple 47 (OA p83). *Transformée de Fourier d'une Gaussienne.*

Application 48. *Prolongement de* Γ *à* $\mathbb{C}\min\mathbb{Z}$.

3.2 Résidus

Théorème 49 (CM 2Queffelec). *[OA] Théorème des résidus.*

Exemple 50 (CM 2Queffelec p163). *Plein d'exemples.*

Application 51 (CM 2Q p234). *Formule des compléments. (On s'en sert pour prolonger zeta.)(Cela permet de prolonger analytiquement la fonction* Γ *à* $\mathbb{C} - \{-n, n\in\mathbb{N}\}$.

Exemple 52. *Calcul de* $\int exp(-x^2)$.

Exemple 53 (Candel). *Intégrale de Fresnel.*

4 Calcul approché d'intégrales

4.1 Méthodes de quadratures élémentaires (Méthodes classiques)

Proposition 54 (Demailly)**.** *[Pommellet] Méthodes de quadratures élémentaires (rectangle, simpson, point milieu...)*

4.2 Méthode de Monte Carlo

Application 55 (Ouvrard p128 ou regarder Appel)**.** *[Toulouse p79-80 82][Candel] Méthode de Monte Carlo.*

Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ *intégrable. On note* $I = \int_{[0,1]^d} f(x) d\lambda(x)$*. Pour* $X_{n,k}$ *des v.a. réelles iid de loi* $U[0,1]$*, on construit* $Yn := (X_{n,1}, .., X_{n,d})$ *qui est une famille de v.a. iid de loi uniforme sur* $[0,1]^d$*. On note* $S_n = (f(Y_1) + .. + f(Y_n))/n$*. Alors, pour tout*$0 < \epsilon \leq (||f||_2/||f||_\infty)^2$ *assez petit, on a :* $\mathbb{P}(I - S_n > \epsilon) \leq 2exp(-n(\epsilon||f||_\infty/||f||_2)^2)$*. L'approximation de l'intégrale de* f *par le barycentre de* n *évaluations données par des v.a. uniformes a ainsi une probabilité de ne pas être* ϵ*-proche de l'intégrale de*f *qui décroît exponentiellement en* n*.*

Exemple 56. *On peut ainsi approximer* $\pi = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx$